Instantons and Four-Manifolds

Daniel S.Freed　Karen K. Uhlenbeck

4 次元多様体自主ゼミ

制作者　@grad31415　　　　更新日　2025/11/08

目次

1 Fake $\mathbf{R}^4$

2 The Yang-Mills Equation

2.1 復習

Definition 2.1 同伴ベクトル束

主ファイバー束 P とその構造群 G の表現 $\rho : G \to GL(r, \mathbf{R})$ を考える
$G \times (P \times \mathbf{R}^r) \to P \times \mathbf{R}^r$ という群作用

$$s : (u, y) \mapsto (us, \rho(s)^{-1}y) \qquad s \in G\ , (u, y) \in P \times \mathbf{R}^r$$

が作る軌道と 1 対 1 対応する商空間 $(P \times \mathbf{R}^r)/G$ を $P \times_\rho \mathbf{R}^r$ という.
$P \times_\rho \mathbf{R}^r$ は $\mathbf{R}^r$ がファイバーとなるベクトル束となり, これを P に同伴するベクトル束という.

M の開被覆 U_α に関する P の変換関数 $\psi_{\alpha\beta}$ を使うと, $E = P \times_\rho \mathbf{R}^r$ は変換関数 $\{\rho \circ \psi_{\alpha\beta}\}$ によって与えられるベクトル束であることも示せる.
同伴ベクトル束 $P \times_\rho V$ の自明化とは

$$P \times_\rho V|_{U_\alpha} = U_\alpha \times V$$

で定義される局所表示であり,$x = y$ かつ $w = s_{\beta\alpha}(v)$ のとき,$(x, v) \sim (y, w)$ という同値関係を用いると

$$P \times_\rho V = \bigsqcup_\alpha U_\alpha \times V/\sim$$

となる.

Definition 2.2 接続

ベクトル束 E の**接続**, または**共変微分**は線形写像

$$\nabla : \Gamma(E) \to \Gamma(T^*M \otimes E)$$

で Leibniz の式

$$\nabla(f\xi) = df \otimes \xi + f \cdot \nabla\xi \qquad f \in C^\infty(M) \quad \xi \in \Gamma(E)$$

を満たすものである

接続 $\nabla_i \quad (i = 1, \cdots n)$ に対して, $\sum_{i=1}^n t_i \nabla_i \quad (\sum t_i = 1)$ も接続となることが分かる
また, 局所自明化 $\pi^{-1}(U_\alpha) = U_\alpha \times \mathbf{R}^r$ によって $E|_{U_\alpha}$ 上の局所的な接続 ∇_α を定義でき, 局所有限な M の開被覆 $\{U_\alpha\}$ とそれに従属する 1 の分割 $\{\rho_\alpha\}$ を使うことで E 上全体の切断

$$\nabla\xi = \sum \nabla_\alpha \rho_\alpha \xi$$

を定義できる.

Definition 2.3　接続形式 曲率形式

ベクトル束は自明化を考えれば局所的に直積束なので, 局所的には 1 次独立な切断の組 $(e_1, \cdots, e_r)$ が存在する. これを E の U 上の局所標構場もしくは枠とする.

接続形式 ω_λ^μ とは

$$\nabla e_\lambda = \sum_\mu \omega_\lambda^\mu e_\mu$$

で定義される M 上の $\mathfrak{gl}$ に値を取る 1 形式

曲率形式 Ω_λ^μ とは

$$Re_\lambda = \sum_\mu \Omega_\lambda^\mu e_\mu$$

で定義される M 上の $\mathfrak{gl}$ に値を取る 2 形式とする. また, 計算をすることで

$$\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega$$

接続 ∇ の**構造方程式**が得られる. これを曲率形式の定義としてもよい.

この表示は局所標構場に依存してしまう. 以下の補題により, ファイバー上の変換関数 $\psi_{\alpha\beta} = a \in GL(r; \mathbf{R})$ を用いることで接続形式と曲率形式の変換を行うことができる.

Proposition 2.4　接続 曲率形式の変換則

接続形式 ω, 曲率形式 Ω は変換関数 $\psi_{\alpha\beta}(x) = a \in GL(r; \mathbf{R})$ を用いることで

$$\omega \to a^{-1}\omega a + a^{-1}da$$

$$\Omega \to a^{-1}\Omega a$$

のように変換される.

証明は森田微分幾何 P203 命題 5.22 や小林微分幾何 P41,46 にある.
逆に, 接続形式と変換関数が与えられると, そのような接続 ∇ が一意的に存在することが知られている. 補足: 一般に Lie 群 G の元 a で Lie 環 $\mathfrak{g}$ の元 X に共役作用させると $a^{-1}Xa \in \mathfrak{g}$ となることが知られているので, 変換後の曲率形式も $\mathfrak{gl}$ に値を取ることが分かる. 証明スペース

Instantons and Four-Manifolds では $\mathfrak{g}$ に値を取る U_α 上 1 次微分形式である接続形式を A_α, $\mathfrak{g}$ に値を取る U_α 上 2 次微分形式である曲率形式を F_α と表記している.
以上のことから, ベクトル束の切断 ∇ を次のように表せる.

Proposition 2.5　接続

ベクトル束の接続 ∇ は U_α 上で

$$\nabla = d + A_\alpha$$

と表される.

証明スペース

ベクトル束の枠を e_i として, $s = s^i e_i \in \Gamma(E)$ とする.

$$\begin{aligned}\nabla(s) = \nabla(s^i e_i) &= ds^i e_i + s^i \nabla e_i \\ &= ds^i e_i + s^i A^{\mu}_{\alpha\ i} e_\mu \\ &= (d + A)s\end{aligned}$$

から導かれる.

Definition 2.6　共変外微分

共変外微分 $D : A^p(M;E) \to A^{p+1}(M;E)$ という微分作用素は

$$D(\xi \otimes \theta) = \nabla\xi \wedge \theta + \xi \otimes d\theta$$

によって定義される.

Proposition 2.7　曲率形式

U_α 上の曲率形式 F_α は

$$F_\alpha = \frac{1}{2} F_{\alpha,\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

$$F_{\alpha,\mu\nu} = \frac{\partial A_{\alpha,\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_{\alpha,\mu}}{\partial x^\nu} + [A_{\alpha,\mu}, A_{\alpha,\nu}]$$

となる.

2.2 Hodge star

Proposition 2.8　Hodge star 作用素

M を n 次元リーマン多様体とする.

$$\star : A^p(M) \to A^{n-p}(M)$$

この Hodge star 作用素とよばれる同型線形写像を

$$\star 1 = \theta^1 \wedge \cdots \wedge \theta^n$$

$$\theta \wedge \star\phi = g(\theta, \phi) \star 1 \qquad \theta, \phi \in A^p(M)$$

で定義する.

証明は他の本に任せるが, 次のような性質が知られている.

$$\star \star \phi = (-1)^{p(n-p)}\phi$$

M が 4 次元多様体で θ, ϕ が 2 形式のとき

$$\star\star = 1$$

となるので,Hodge star 作用素の固有値は ± 1 である. 各固有値の固有空間を A_+, A_- とすると

$$A^2(M) = A_+(M) \oplus A_-(M)$$

となる.

このとき, A^2 は $\mathfrak{so}(4)$, $A_{+,-}$ は $\mathfrak{so}(4)$ と見なすことができる.(証明は小林微分幾何 6.1 にまかせる)

証明スペース

2.3 Chern 類

Proposition 2.9 Chern 類

E をファイバーが $\mathbf{C^k}$ の複素ベクトル束とする.
全 Chern 類を不変多項式

$$c(F) = \det\left(1 + \frac{iF}{2\pi}\right)$$

で定義する.F は 2 形式なので全 Chern 類を展開すると

$$c(F) = 1 + c_1(F) + c_2(F) + \cdots + c_k(F)$$

となる. $c_j(F) \in A^{2j}(M)$ を第 j 次 Chern 類という.

Chern 類の例として以下が知られている

$$c_0(F) = 1, \quad c_1(F) = \frac{i}{2\pi}\operatorname{tr}(F) \quad , c_k = (\frac{i}{2\pi})^k \det F$$
$$c_2(F) = \frac{1}{2}(\frac{i}{2\pi})^2(\operatorname{tr} F \wedge \operatorname{tr} F - \operatorname{tr}(F \wedge F))$$

特に,$G = SU(2)$ の第 2Chern 類 $c_2(F)$ を M 上で積分した値を

$$k = -c_2(F)[M] = -\frac{1}{8\pi^2}\int_M \operatorname{tr}(F \wedge F)$$

第 2 Chern 数とする. これは接続に依らないトポロジカルな量であることが知られている. より一般には $Ad(g)$ の変換で不変な多項式から M 上のコホモロジー類を作れるという定理で保証されている (Chern-Weil の定理)

証明スペース

Proposition 2.10　直線束を用いた分割

多様体 M 上の第 2 Chern 数を持つ $SU(2)$ バンドルが直線束に分割されるための必要十分条件は $\alpha \in H^2(M,R)$ に対して

$$\omega(\alpha,\alpha)=k$$

が成り立つことである. ここで ω は交差形式と呼ばれる $\omega : H^2(M,Z)\times H^2(M,Z)\to R$ であり,

$$\omega(\alpha,\beta)=\int_M \alpha\wedge\beta$$

で定義される.

証明スペース

2.4 Yang-Mills 接続

Ad 不変な内積を (-,-) で定義する. 例えば (A,B)=-tr(A,B)　$A,B\in\mathfrak{so}(2)$ など
M はリーマン多様体なので U 上微分形式 θ^i と $\mathfrak{g}$ 上微分形式が正規直交基になるように選ぶ.

$$F=\frac{1}{2}\sum F^i_{\alpha,\beta}\theta^\alpha\wedge\theta^\beta\otimes B_i$$

曲率形式が上のように与えられたとき

$$|F|^2=\langle F,F\rangle=\sum_{i\alpha\beta}|F^i_{\alpha,\beta}|^2$$

のように $|F|^2$ を定義する.

Proposition 2.11　Yang-Mills 汎関数

Yang-Mills 汎関数 $\mathfrak{Ym}$ は接続に依存する関数であり, .

$$\mathfrak{Ym}(A)=\int_M|F_A|^2\star 1$$

で定義される.

Proposition 2.12　Yang-Mills 接続

Yang-Mills 汎関数はゲージ不変である.
また, Yang-Mills 汎関数の停留点は

$$D^*F_A=-\star D\star F_A=0$$

で与えられる.

この式を Yang-Mills の方程式といい, Yang-Mills の方程式を満たす接続を Yang-Mills の接続という.
証明スペース

Proposition 2.13　Yang-Mills の方程式

Yang-Mills の方程式は

$$D^*F = \left(\sum_i \frac{\partial F_{ij}}{\partial x^i} + [A_i, F_{ij}] \right) dx^j = 0$$

で与えられる.

また, 任意の接続形式に対して Bianchi 恒等式

$$DF = dF + [A, F] = 0$$

も成立する.

証明スペース

$A^2(M)$ の分解を $A^2(E)$ に拡張する. 曲率形式 $F \in A^2(P \times_{Ad} \mathfrak{g})$ は

$$F = F_+ + F_- \qquad (\star F_+ = F_+ \quad , \star F_- = -F_-)$$

のように分解できる.

Proposition 2.14　曲率形式の長さ

Ad 不変な $\mathfrak{g}$ 上の内積 $\beta(,) = -\operatorname{tr}(,)$ と曲率形式 $F \in A^2(P \times_{Ad} \mathfrak{g})$ に対して

$$F = \frac{1}{2} \sum F^i_{\alpha\beta} \theta^\alpha \wedge \theta^\beta \otimes B_i$$

$$F_\pm = \frac{1}{2} \sum {F_\pm}^i_{\alpha\beta} \theta^\alpha \wedge \theta^\beta \otimes B_i$$

$$|F|^2 = \sum |F^i_{\alpha\beta}|^2 \qquad |F_\pm|^2 = \sum |{F_\pm}^i_{\alpha\beta}|^2$$

としたとき,

$$\langle F \wedge \star F \rangle = \beta(F, \star F) = |F|^2 \star 1 = (|F_+|^2 + |F_-|^2) \star 1$$

が成立する. また,

$$\langle F \wedge F \rangle = \beta(F, F) = (|F_+|^2 - |F_-|^2) \star 1$$

も成立する.

証明スペース

Proposition 2.15　Yang-Mills 接続と自己双対接続

Chern 数によって Yang-Mills 汎関数に制限を与えることができる.

$$\mathfrak{Ym}(A) = \int_M (|F_+|^2 + |F_-|^2) \star 1$$

$$\int_M \langle F \wedge F \rangle = \int_M (|F_+|^2 - |F_-|^2) \star 1 = -8\pi^2 \mathrm{ch}_2(P) = 4\pi^2 (2c_2(P) - c_1(P)^2)$$

が成り立つので,

$$\mathfrak{Ym}(A) \geq 8\pi^2 |\mathrm{ch}_2(P)|$$

が得られる. 特に, $G = SU(N)$ の場合は $c_1(F) = 0$ より

$$\mathfrak{Ym}(A) \geq 8\pi^2 c_2(P) = 8\pi^2 k$$

である. 等号成立条件は

自己双対接続 (self-dual) またはインスタントン (instanton)

$$F_+ = 0 \quad (\mathrm{ch}_2(P) \geq 0 \text{ の場合})$$

反自己双対接続 (anti-self-dual) または反インスタントン (anti-instanton)

$$F_- = 0 \quad (\mathrm{ch}_2(P) \leq 0 \text{ の場合})$$

である.

以上より, 自己双対接続および半自己双対接続は Yang-Mills 接続である.

ゲージ理論とトポロジー (深谷) によると, 4 次元の場合に自己双対接続, 半自己双対接続以外に Yang-Mills 接続が存在するかどうかはしばらく未解決問題であったが, 意外にも 4 次元球面 (普通の計量を入れる) 上に自己双対でも反自己双対でもない Yang-Mills 接続が存在することが Sibner と Uhlenbeck によって示されたらしい.

証明スペース

2.5 モジュライ空間

Proposition 2.16 モジュライ空間

自己双対接続全体の集合をゲージ変換全体で割った商空間を

$$\mathcal{M}^+ = \{A \in \mathcal{C} : F_A = \star F_A\}/\mathcal{G}$$

で定義する. この空間は自己双対接続のモジュライ空間 (moduli space) と呼ぶ.

Proposition 2.17 Hodge の定理

λ が線束である場合 ,Yang-Mills 接続 A の曲率は, $c_1(\lambda)$ を表す唯一の調和 2 形式である.

線束 λ のファイバーは $\mathbf{C}$ で構造群は $U(1)$
証明スペース

Proposition 2.18 $U(1)$ **直線束のモジュライ空間**

$H^1_{dR}(M;R) = 0$ のとき, 線束 λ のモジュライ空間は 1 点である.

証明スペース